TEORIA dei SEGNALI
Prova scritta del 16-07-98

Candidato .... Matr. 090. .... No..........
(Cognome e Nome)

Esercizio n. 1

Dato il segnale sinusoidale $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$ all'ingresso di un dispositivo non lineare caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita $y(t)=x(t)\, u_{-1}[\, x(t) - 0.5\,]$, calcolare lo spettro dell'uscita y(t).

Esercizio n. 2

Calcolare e graficare lo spettro di densità di potenza del processo $Y(t)=[X(t) + 1]^2$, essendo X(t) un processo Gaussiano ergodico avente spettro di densità di potenza $S(f) = \frac{1}{B}\, \mathrm{rect}_B(f)$.

Esercizio n. 3

Calcolare l'inter-correlazione tra l'ingresso e l'uscita di un filtro passa-basso RC, quando in ingresso e' presente il segnale $x(t) = e^{-t/RC} u_{-1}(t)$.

Soluzione esercizio # 1

Il segnale y(t) è periodico di periodo $T=1/f_0$. Il suo spettro ha quindi la forma

$$Y(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k u_0(f-kf_0),$$

dove i coefficienti Y_k sono pari a

$$Y=f_0 G(kf_0)$$

e G(f) è la trasformata di Fourier di $g(t)=A\cos(2\pi f_0 t)\mathrm{rect}_{\frac{2}{3f_0}}(t)$.

Si ottiene quindi

$$G(f)=\frac{A}{3f_0}[\mathrm{sinc}(\frac{2\pi(f-f_0)}{3f_0})+\mathrm{sinc}(\frac{2\pi(f+f_0)}{3f_0})],$$

da cui

$$Y_k=\frac{A}{3}[\mathrm{sinc}(\frac{2\pi(k-1)}{3})+\mathrm{sinc}(\frac{2\pi(k+1)}{3})].$$

Soluzione esercizio # 2

La correlazione di Y(t) vale

$$R_{YY}(\tau)=E\{[X(t)+1]^2[X(t+\tau)+1]^2\}=R_{XX}^2(0)+2R_{XX}^2(\tau)+2R_{XX}(0)+4R_{XX}(\tau)+1.$$

Lo spettro è quindi:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{RC}{2}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

Soluzione esercizio # 3

Lo spettro del segnale x(t) è:

$$X(f)=\frac{1}{1/RC+j2\pi f}\quad\Rightarrow\quad |X(f)|^2=\frac{RC}{2}\frac{2/RC}{(1/RC)^2+(2\pi f)^2}$$

perciò antitrasformando $|X(f)|^2$ si ha:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{RC}{2}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}.$$

la risposta impulsiva di un filtro RC è:

$$h(\tau)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}u_{-1}(\tau).$$

L'intercorrelazione tra ingresso ed uscita è data da:

$$R_{xy}(\tau)=R_{xx}(\tau)*h(\tau)$$

perciò:

$1)\tau\le 0$

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\tau}e^{\frac{t}{RC}}e^{-\frac{(\tau-t)}{RC}}dt=\frac{1}{2}e^{-\frac{\tau}{RC}}\frac{RC}{2}\left[e^{\frac{2t}{RC}}\right]_{-\infty}^{\tau}=\frac{RC}{4}e^{\frac{\tau}{RC}}$$

$2)\tau>0$

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{t}{RC}}e^{-\frac{(\tau-t)}{RC}}dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{\tau}e^{\frac{t}{RC}}e^{-\frac{(\tau-t)}{RC}}dt=\frac{1}{2}e^{-\frac{\tau}{RC}}\frac{RC}{2}\left[e^{\frac{2t}{RC}}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2}e^{-\frac{\tau}{RC}}\tau=\frac{RC}{4}\left(1+\frac{2\tau}{RC}\right)e^{-\frac{\tau}{RC}}$$